FISIMAT.com.mx

CÁLCULO INTEGRAL

Ing. Carlos Julián
Guía Exclusiva de Estudio

Área Bajo la Curva y Área Entre Dos Curvas

Guía Maestra de 25 Ejercicios Resueltos Paso a Paso y Formulario Práctico

🎁 Edición de Estudio Gratuita (Primeros 5 Resueltos + 20 de Práctica)

⭐ Formulario Rápido y Conceptos Fundamentales

Área Bajo una Curva No Negativa: Evaluación directa mediante el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo F(b) - F(a).

$$A = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \big(f(x) \geq 0 \text{ en } [a,b]\big)$$

Área Geométrica Total con Cambio de Signo: Cuando f(x) cruza el eje X en x = c, las regiones inferiores se integran con signo cambiado.

$$A_{\text{total}} = \int_a^b |f(x)|\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx$$

Área Entre Dos Curvas (Franja Vertical dx): Se resta siempre la curva inferior de la curva superior sobre el intervalo [a, b].

$$A = \int_a^b \big[\, f_{\text{sup}}(x) - g_{\text{inf}}(x) \,\big]\,dx$$

Área Entre Dos Curvas (Franja Horizontal dy): Útil cuando es más sencillo despejar x en función de y.

$$A = \int_c^d \big[\, x_{\text{der}}(y) - x_{\text{izq}}(y) \,\big]\,dy$$

Regla de Barrow y Potencias: Fórmula fundamental de integración definida polinómica.

$$\int_a^b x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$$

Parte 1: Calentamiento (Uso Directo de Fórmulas)

Enfocada en afianzar conceptos clave y despejes básicos.

Ejercicio 1 Área bajo una recta en el primer cuadrante

Calcula el área bajo $f(x) = 2x + 1$ en el intervalo $[0, 4]$.

💡 Procedimiento Paso a Paso:

Datos Clave:

- $f(x) = 2x + 1 \geq 0$ en $[0, 4]$

Fórmula y Despeje:

$$A = \int_0^4 (2x + 1)\, dx$$

Sustitución y Operaciones:

$$A = \left[x^2 + x\right]_0^4 = (16 + 4) - 0 = 20 \text{ u}^2$$

RESULTADO: 20 u^2

Nota Física: Coincide exactamente con el área del trapecio de bases 1 y 9 y altura 4: $\frac{1+9}{2} \cdot 4 = 20$.

Ejercicio 2 Área bajo la parábola elemental y = x²

Encuentra el área bajo $y = x^2$ desde $x = 0$ hasta $x = 3$.

💡 Procedimiento Paso a Paso:

Datos Clave:

- $a = 0, b = 3$

Fórmula y Despeje:

$$A = \int_0^3 x^2\, dx$$

Sustitución y Operaciones:

$$A = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{27}{3} - 0 = 9 \text{ u}^2$$

RESULTADO: 9 u^2

Nota Física: El área bajo la parábola equivale exactamente a un tercio del rectángulo circunscrito de $3 \times 9 = 27$.

Ejercicio 3 Área bajo un arco parabólico invertido

Calcula el área limitada por $y = 4 - x^2$ y el eje X (entre sus intersecciones $x = -2$ y $x = 2$).

💡 Procedimiento Paso a Paso:

Datos Clave:

- Raíces: $4 - x^2 = 0 \implies x = \pm 2$

Fórmula y Despeje:

$$A = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\, dx = 2\int_{0}^{2} (4 - x^2)\, dx$$

Sustitución y Operaciones:

$$A = 2\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 2\left(8 - \frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3}\ \text{u}^2$$

RESULTADO: $\frac{32}{3}\ \text{u}^2 \approx 10.67\ \text{u}^2$

Nota Física: La simetría par respecto al eje Y duplica la integral de 0 a 2.

Ejercicio 4 Área bajo una función exponencial natural

Determina el área exacta bajo $f(x) = e^x$ en $[0, \ln 5]$.

💡 Procedimiento Paso a Paso:

Datos Clave:

- $f(x) = e^x > 0$ siempre

Fórmula y Despeje:

$$A = \int_{0}^{\ln 5} e^x\, dx$$

Sustitución y Operaciones:

$$A = [e^x]_0^{\ln 5} = e^{\ln 5} - e^0 = 5 - 1 = 4\ \text{u}^2$$

RESULTADO: $4\ \text{u}^2$

Nota Física: La función exponencial natural es su propia antiderivada.

Ejercicio 5 **Área bajo un arco de función seno**

Calcula el área bajo $y = \sin(x)$ en $[0, \pi]$.

💡 **Procedimiento Paso a Paso:**

Datos Clave:

- $\sin(x) \geq 0$ en $[0, \pi]$

Fórmula y Despeje:

$$A = \int_0^{\pi} \sin(x)\, dx$$

Sustitución y Operaciones:

$$A = [-\cos(x)]_0^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos 0) = -(-1) + 1 = 2 \text{ u}^2$$

RESULTADO: 2 u^2

Nota Física: Cada arco completo de la función seno posee exactamente 2 unidades cuadradas de área.

Parte 2: Análisis y Aplicación Práctica

Problemas contextualizados que requieren más de un paso analítico.

Ejercicio 6 **Área geométrica total con cruce por el eje X**

Calcula el área total encerrada entre $f(x) = x^2 - 4$, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 3$.

Datos del Problema:

- En $[0, 2]$, $f(x) \leq 0$ (debajo del eje); en $[2, 3]$, $f(x) \geq 0$

🔒

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 **Desbloquear Guía Completa de Área Bajo la Curva y Área Entre Dos Curvas**

Ejercicio 7 Área entre parábola invertida y recta (y = 4 - x² y y = x + 2)

Halla el área de la región cerrada limitada por $y = 4 - x^2$ y $y = x + 2$.

Datos del Problema:

- Intersecciones: $4 - x^2 = x + 2 \implies x^2 + x - 2 = 0 \implies x = -2,\ 1$

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Área Bajo la Curva y Área Entre Dos Curvas

Ejercicio 8 Área entre dos parábolas opuestas

Calcula el área encerrada entre $y = x^2$ y $y = 8 - x^2$.

Datos del Problema:

- Intersecciones: $x^2 = 8 - x^2 \implies 2x^2 = 8 \implies x = \pm 2$

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Área Bajo la Curva y Área Entre Dos Curvas

Ejercicio 9 Área entre y = x² y y = √x en [0, 1]

Determina el área de la lente encerrada entre $y = \sqrt{x}$ y $y = x^2$.

Datos del Problema:

- Intersecciones: $\sqrt{x} = x^2 \implies x = 0,\ 1$; en $[0, 1]$, $\sqrt{x} \geq x^2$

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Área Bajo la Curva y Área Entre Dos Curvas

Ejercicio 10 Área bajo la hipérbola 1/x (logaritmo natural)

Calcula el área bajo $y = \frac{1}{x}$ entre $x = 1$ y $x = e^3$.

Datos del Problema:

- $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Área Bajo la Curva y Área Entre Dos Curvas

Ejercicio 11 Área entre una función cúbica y una recta

Encuentra el área total encerrada entre $f(x) = x^3$ y $g(x) = x$.

Datos del Problema:

- Intersecciones: $x^3 = x \implies x(x^2-1) = 0 \implies x = -1, 0, 1$
- En $[-1, 0]$, $x^3 \geq x$; en $[0, 1]$, $x \geq x^3$

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Área Bajo la Curva y Área Entre Dos Curvas

Ejercicio 12 Integración horizontal respecto a dy (parábola en y)

Calcula el área encerrada por la parábola $x = y^2$ y la recta $x = y + 2$ integrando respecto a y.

Datos del Problema:

- Intersecciones: $y^2 = y + 2 \implies (y-2)(y+1) = 0 \implies y = -1,\ 2$

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Área Bajo la Curva y Área Entre Dos Curvas

Ejercicio 13 Área bajo función racional usando sustitución simple

Calcula el área bajo $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ en $[0, 2]$.

Datos del Problema:

- Sustitución $u = x^2 + 1, du = 2x\,dx$

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Área Bajo la Curva y Área Entre Dos Curvas

Ejercicio 14 Área entre curvas trigonométricas seno y coseno

Halla el área encerrada entre $y = \cos(x)$ y $y = \sin(x)$ desde $x = 0$ hasta su primer cruce en $x = \frac{\pi}{4}$.

Datos del Problema:

- En $[0, \pi/4], \cos x \geq \sin x$

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Área Bajo la Curva y Área Entre Dos Curvas

Ejercicio 15 Área bajo raíz cuadrada con desplazamiento lineal

Calcula el área bajo $f(x) = \sqrt{x+4}$ desde $x = 0$ hasta $x = 5$.

Datos del Problema:

- $u = x + 4 \implies du = dx$

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Área Bajo la Curva y Área Entre Dos Curvas

Parte 3: Nivel Examen e Ingeniería

Ejercicios de alta exigencia, situaciones combinadas y casos reales.

Ejercicio 16 Área de un triángulo formado por tres rectas mediante integrales

Encuentra el área del triángulo acotado por $y = 2x$, $y = 6 - x$ y el eje X $(y = 0)$.

Datos del Problema:

- Vértices: $(0, 0)$, $(2, 4)$ y $(6, 0)$

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Área Bajo la Curva y Área Entre Dos Curvas

Ejercicio 17 Área entre dos parábolas horizontales usando dy

Calcula el área encerrada entre $x = y^2 - 2$ y $x = 6 - y^2$.

Datos del Problema:

- Intersecciones: $y^2 - 2 = 6 - y^2 \implies 2y^2 = 8 \implies y = \pm 2$

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Área Bajo la Curva y Área Entre Dos Curvas

Ejercicio 18 Curvas que se cruzan con dos subregiones distintas

Halla el área total acotada entre $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = x$ en el intervalo $[0, 4]$.

Datos del Problema:

- Cruce: $x^2 - 2x = x \implies x = 0,\ 3$
- En $[0, 3]$, $g \geq f$; en $[3, 4]$, $f \geq g$

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Área Bajo la Curva y Área Entre Dos Curvas

Ejercicio 19 Área bajo curva con integración por partes

Calcula el área bajo $f(x) = xe^{-x}$ en $[0, 2]$.

Datos del Problema:

- Partes: $u = x,\ dv = e^{-x}dx$

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Área Bajo la Curva y Área Entre Dos Curvas

Ejercicio 20 Área entre parábola y recta tangente

Calcula el área comprendida entre $y = x^2$, su recta tangente en $(1, 1)$ dada por $y = 2x - 1$, y el eje X ($y = 0$) en el primer cuadrante.

Datos del Problema:

- Tangente corta al eje X en $x = 1/2$

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Área Bajo la Curva y Área Entre Dos Curvas

Ejercicio 21 Área entre funciones exponenciales y rectas verticales

Calcula el área entre $y = e^x$ y $y = e^{-x}$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

Datos del Problema:

- En $[0, 1]$, $e^x \geq e^{-x}$

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Área Bajo la Curva y Área Entre Dos Curvas

Ejercicio 22 Valor de constante k para igualar un área dada

Determina el valor positivo de k tal que el área bajo $y = 3x^2$ en $[0, k]$ sea exactamente $64\ \text{u}^2$.

Datos del Problema:

- $A = 64, k > 0$

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Área Bajo la Curva y Área Entre Dos Curvas

Ejercicio 23 Área de un cuarto de círculo unitario por sustitución trigonométrica

Usa integración definida para hallar el área bajo $y = \sqrt{4 - x^2}$ en $[0, 2]$.

Datos del Problema:

- Semicírculo de radio $R = 2$ en el primer cuadrante

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Área Bajo la Curva y Área Entre Dos Curvas

Ejercicio 24 Recta vertical que biseca el área bajo una parábola

Halla el valor $c \in (0, 2)$ tal que la recta $x = c$ divida en dos partes iguales el área bajo $y = 4x - x^2$ en $[0, 4]$.

Datos del Problema:

- Área total por simetría alrededor de $x = 2$: $\frac{32}{3}$

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Área Bajo la Curva y Área Entre Dos Curvas

Ejercicio 25 **Área encerrada entre valor absoluto y recta horizontal**

Calcula el área limitada entre $y = |x - 2|$ y la recta $y = 3$.

Datos del Problema:

- Intersecciones: $|x - 2| = 3 \implies x = -1,\ 5$

🔒

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 **Desbloquear Guía Completa de Área Bajo la Curva y Área Entre Dos Curvas**