FISIMAT.com.mx

CÁLCULO MULTIVARIABLE • MATEMÁTICAS UNIVERSITARIAS

Ing. Carlos Julián
Guía Exclusiva de Estudio

Derivadas Parciales: Primer y Segundo Orden

Guía Maestra de 25 Ejercicios Resueltos Paso a Paso y Formulario de Clairaut

🎁 Edición de Estudio Gratuita (Primeros 5 Resueltos + 20 de Práctica)

⭐ Formulario Rápido y Conceptos Fundamentales

Definición por Límites de Derivada Parcial: Mide la tasa instantánea de cambio a lo largo de las direcciones canónicas cartesianas.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{k \to 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}$$

Teorema de Clairaut (Derivadas Mixtas): Válido para funciones cuyas segundas derivadas parciales sean continuas en un entorno abierto.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad (f_{xy} = f_{yx})$$

Ecuación del Plano Tangente: Aproximación lineal de primer orden a la superficie en la vecindad del punto P0.

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Diferencial Total: Permite estimar variaciones pequeñas y propagación de errores en mediciones experimentales.

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Regla de la Cadena Multivariable: Para funciones compuestas donde las variables intermedias dependen de un parámetro t.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Parte 1: Calentamiento (Uso Directo de Fórmulas)

Enfocada en afianzar conceptos clave y despejes básicos.

Ejercicio 1 **Derivadas parciales de un polinomio cuadrático**

Dada la función $f(x,y) = 3x^2y - 5xy^3 + 4x - 7y + 9$, calcula $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$.

💡 **Procedimiento Paso a Paso:**

Datos Clave:

- Función: $f(x,y) = 3x^2y - 5xy^3 + 4x - 7y + 9$

Fórmula y Despeje:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^n) = nx^{n-1}, \quad \frac{\partial}{\partial x}(C) = 0 \quad (y = \text{constante})$$

Despejando:

$$\text{Para } \partial f/\partial x, \text{ tratar a } y \text{ como constante; para } \partial f/\partial y, \text{ tratar a } x \text{ como constante.}$$

Sustitución y Operaciones:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3(2x)y - 5(1)y^3 + 4 - 0 + 0 = 6xy - 5y^3 + 4$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2(1) - 5x(3y^2) + 0 - 7 + 0 = 3x^2 - 15xy^2 - 7$$

RESULTADO: $f_x = 6xy - 5y^3 + 4, \quad f_y = 3x^2 - 15xy^2 - 7$

Nota Física: Al derivar respecto a x, los términos que solo contienen a y actúan como constantes aditivas cuya derivada es cero.

Ejercicio 2 **Evaluación de derivadas parciales en un punto**

Para la función $f(x,y) = x^3y^2 - 2x^2 + 4y$, evalúa $f_x(2,-1)$ y $f_y(2,-1)$.

💡 **Procedimiento Paso a Paso:**

Datos Clave:

- Función: $f(x,y) = x^3y^2 - 2x^2 + 4y$
- Punto de evaluación: $(x_0, y_0) = (2,-1)$

Fórmula y Despeje:

$$f_x(x,y) = 3x^2y^2 - 4x, \quad f_y(x,y) = 2x^3y + 4$$

Despejando:

$$\text{Sustituir } x = 2 \text{ e } y = -1 \text{ en las expresiones algebraicas.}$$

Sustitución y Operaciones:

$$f_x(2,-1) = 3(2)^2(-1)^2 - 4(2) = 3(4)(1) - 8 = 12 - 8 = 4$$
$$f_y(2,-1) = 2(2)^3(-1) + 4 = 2(8)(-1) + 4 = -16 + 4 = -12$$

RESULTADO: $f_x(2,-1) = 4, \quad f_y(2,-1) = -12$

Nota Física: En el punto $(2,-1)$, la superficie sube con pendiente +4 en dirección a x y cae con pendiente -12 en dirección a y.

Ejercicio 3 **Función exponencial con producto de variables**

Calcula las primeras derivadas parciales de $z = e^{2x+3y}$.

💡 **Procedimiento Paso a Paso:**

Datos Clave:

- Función: $z = e^u$ donde $u = 2x + 3y$

Fórmula y Despeje:

$$\frac{\partial}{\partial x}(e^u) = e^u \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}(e^u) = e^u \frac{\partial u}{\partial y}$$

Despejando:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3$$

Sustitución y Operaciones:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2e^{2x+3y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3e^{2x+3y}$$

RESULTADO: $z_x = 2e^{2x+3y}, \quad z_y = 3e^{2x+3y}$

Nota Física: La derivada de la función exponencial preserva el factor original multiplicado por la derivada del exponente.

Ejercicio 4 **Función trigonométrica con argumento multivariable**

Calcula $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ para $f(x,y) = \sin(x^2 y)$.

💡 **Procedimiento Paso a Paso:**

Datos Clave:

- Función: $f(x,y) = \sin(u)$ con $u = x^2 y$

Fórmula y Despeje:

$$\frac{d}{du}[\sin(u)] = \cos(u)$$

Despejando:

$$u_x = 2xy, \quad u_y = x^2$$

Sustitución y Operaciones:

$$f_x = \cos(x^2 y) \cdot (2xy) = 2xy\cos(x^2 y)$$
$$f_y = \cos(x^2 y) \cdot (x^2) = x^2\cos(x^2 y)$$

RESULTADO: $f_x = 2xy\cos(x^2 y), \quad f_y = x^2\cos(x^2 y)$

Nota Física: Se aplica la regla de la cadena considerando a la otra variable como constante en cada paso.

Ejercicio 5 **Cociente con regla del cociente multivariable**

Determina las derivadas parciales de $z = \frac{x-y}{x+y}$.

💡 **Procedimiento Paso a Paso:**

Datos Clave:

- Función: $z = \frac{u}{v}$ con $u = x - y$, $v = x + y$

Fórmula y Despeje:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u_x v - u v_x}{v^2}$$

Despejando:

$$u_x = 1, v_x = 1 \implies z_x = \frac{(1)(x+y) - (x-y)(1)}{(x+y)^2} = \frac{2y}{(x+y)^2}$$

Sustitución y Operaciones:

$$u_y = -1, v_y = 1 \implies z_y = \frac{(-1)(x+y) - (x-y)(1)}{(x+y)^2} = \frac{-x-y-x+y}{(x+y)^2} = \frac{-2x}{(x+y)^2}$$

RESULTADO: $$z_x = \frac{2y}{(x+y)^2}, \quad z_y = -\frac{2x}{(x+y)^2}$$

Nota Física: Nótese la elegante antisimetría de las derivadas parciales debido a la estructura del numerador y denominador.

Parte 2: Análisis y Aplicación Práctica

Problemas contextualizados que requieren más de un paso analítico.

Ejercicio 6 **Verificación del Teorema de Clairaut en función polinómica**

Para $f(x,y) = x^4y^3 - 2x^2y^5$, calcula las cuatro derivadas de segundo orden y comprueba que $f_{xy} = f_{yx}$.

Datos del Problema:

- Función: $f(x,y) = x^4y^3 - 2x^2y^5$

🔒 **¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?**

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 **Desbloquear Guía Completa de Derivadas Parciales: Primer y Segundo Orden**

Ejercicio 7 Ecuación de Laplace en 2D (Función Armónica)

Demuestra que la función $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ satisface la ecuación de Laplace en dos dimensiones: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Datos del Problema:

- Función potencial: $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Derivadas Parciales: Primer y Segundo Orden

Ejercicio 8 Plano tangente a un paraboloide elíptico

Encuentra la ecuación del plano tangente al paraboloide $z = 4x^2 + y^2$ en el punto $(1, 2, 8)$.

Datos del Problema:

- Superficie: $z = 4x^2 + y^2$
- Punto: $(x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 8)$

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Derivadas Parciales: Primer y Segundo Orden

Ejercicio 9 Estimación de error mediante diferencial total

El volumen de un cilindro es $V = \pi r^2 h$. Si el radio se mide con $r = 5.0 \pm 0.1\,\text{cm}$ y la altura con $h = 20.0 \pm 0.2\,\text{cm}$, calcula el error absoluto máximo estimado en el volumen.

Datos del Problema:

- $r = 5\,\text{cm},\ dr = 0.1\,\text{cm}$
- $h = 20\,\text{cm},\ dh = 0.2\,\text{cm}$

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Derivadas Parciales: Primer y Segundo Orden

Ejercicio 10 Regla de la cadena multivariable con un parámetro

Sea $z = x^2y + 3xy^4$, donde $x = \sin(2t)$ e $y = \cos(t)$. Calcula $\frac{dz}{dt}$ en $t = 0$.

Datos del Problema:

- Superficie: $z = x^2y + 3xy^4$
- Trayectoria: $x = \sin(2t)$, $y = \cos(t)$
- Tiempo: $t = 0 \implies x(0) = 0,\ y(0) = 1$

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Derivadas Parciales: Primer y Segundo Orden

Ejercicio 11 Derivada parcial implícita de una esfera

Para la superficie definida implícitamente por $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, calcula $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ mediante el teorema de la función implícita.

Datos del Problema:

- Ecuación implícita: $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 25 = 0$

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Derivadas Parciales: Primer y Segundo Orden

Ejercicio 12 Ecuación de onda unidimensional

Verifica que la función de onda $u(x, t) = \sin(x - vt)$ satisface la ecuación de onda clásica: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Datos del Problema:

- Perfil de onda: $u(x, t) = \sin(x - vt)$

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Derivadas Parciales: Primer y Segundo Orden

Ejercicio 13 Función logarítmica con argumento cuadrático

Calcula las primeras derivadas parciales de $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$.

Datos del Problema:

- Función: $f(x,y) = \ln(u)$ con $u = x^2 + y^2$

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Derivadas Parciales: Primer y Segundo Orden

Ejercicio 14 Cálculo de segunda derivada mixta en función trascendente

Dada $f(x,y) = e^x \cos(y)$, calcula f_{xx} y f_{yy} y comprueba si es armónica.

Datos del Problema:

- Función: $f(x,y) = e^x \cos(y)$

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Derivadas Parciales: Primer y Segundo Orden

Ejercicio 15 Vector normal unitario a una superficie

Para el cono elíptico $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, halla un vector normal unitario en el punto $(3,4,5)$.

Datos del Problema:

- Superficie: $F(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2} - z = 0$
- Punto: $(3,4,5)$

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Derivadas Parciales: Primer y Segundo Orden

Parte 3: Nivel Examen e Ingeniería

Ejercicios de alta exigencia, situaciones combinadas y casos reales.

Ejercicio 16 Regla de la cadena con dos variables intermedias y dos independientes

Si $z = f(x, y) = x^2 - y^2$, con $x = u\cos(v)$ e $y = u\sin(v)$, calcula $\frac{\partial z}{\partial u}$ y $\frac{\partial z}{\partial v}$.

Datos del Problema:

- $z = x^2 - y^2$
- $x = u\cos(v)$, $y = u\sin(v)$

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Derivadas Parciales: Primer y Segundo Orden

Ejercicio 17 Identificación de puntos críticos mediante el Hessiano

Encuentra los puntos críticos de $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ y clasifícalos utilizando la matriz Hessiana (criterio de las segundas derivadas).

Datos del Problema:

- Función: $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Derivadas Parciales: Primer y Segundo Orden

Ejercicio 18 Derivada parcial de tercer orden combinada

Para $f(x, y) = x^5y^4 + \sin(x)\cosh(y)$, calcula $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$.

Datos del Problema:

- Función: $f(x, y) = x^5y^4 + \sin(x)\cosh(y)$

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Derivadas Parciales: Primer y Segundo Orden

Ejercicio 19 Ecuación de calor unidimensional

Demuestra que $u(x,t) = e^{-\alpha k^2 t}\sin(kx)$ satisface la ecuación de difusión térmica: $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Datos del Problema:

- Perfil térmico: $u(x,t) = e^{-\alpha k^2 t}\sin(kx)$

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Derivadas Parciales: Primer y Segundo Orden

Ejercicio 20 Ecuación de estado del gas ideal y derivadas termodinámicas

Para un gas ideal $P(V,T) = \frac{nRT}{V}$, demuestra la relación cíclica de Euler: $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = -1$.

Datos del Problema:

- Gas ideal: $PV = nRT$

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Derivadas Parciales: Primer y Segundo Orden

Ejercicio 21 Derivada direccional máxima y gradiente

Para $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2$, calcula la tasa máxima de variación en el punto $(1,2)$ y la dirección en la que ocurre.

Datos del Problema:

- Función: $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2$
- Punto: $P(1,2)$

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Derivadas Parciales: Primer y Segundo Orden

Ejercicio 22 Invarianza del Laplaciano bajo rotación de coordenadas

Demuestra que el operador de Laplace $\nabla^2 f = f_{xx} + f_{yy}$ es invariante bajo una rotación rígida de ejes: $x = u\cos\theta - v\sin\theta$, $y = u\sin\theta + v\cos\theta$.

Datos del Problema:

- Matriz de rotación ortogonal con $\det(R) = 1$

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Derivadas Parciales: Primer y Segundo Orden

Ejercicio 23 Plano osculador y curvatura en trayectorias espaciales

Para la superficie $z = xy$, determina la recta normal a la superficie en el punto $(2, 3, 6)$.

Datos del Problema:

- Superficie: $F(x, y, z) = xy - z = 0$
- Punto: $(2, 3, 6)$

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Derivadas Parciales: Primer y Segundo Orden

Ejercicio 24 Ecuación diferencial parcial de Poisson electrostática

Si el potencial eléctrico en una región con densidad de carga uniforme ρ_0 es $\Phi(x, y) = -\frac{\rho_0}{4\epsilon_0}(x^2 + y^2)$, demuestra que satisface la ecuación de Poisson: $\nabla^2\Phi = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0}$.

Datos del Problema:

- Potencial: $\Phi(x, y) = -\frac{\rho_0}{4\epsilon_0}(x^2 + y^2)$

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Derivadas Parciales: Primer y Segundo Orden

Ejercicio 25 Derivada parcial de una integral con parámetros (Regla de Leibniz)

Calcula $\frac{\partial}{\partial y}\int_0^x e^{-yt^2}\,dt$ utilizando la regla de Leibniz para derivar bajo el signo de la integral.

Datos del Problema:

- Integral paramétrica: $I(x,y)=\int_0^x e^{-yt^2}\,dt$

🔒

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Derivadas Parciales: Primer y Segundo Orden