**FISIMAT.com.mx**

ÁLGEBRA Y PRECÁLCULO

**Ing. Carlos Julián**
Guía Exclusiva de Estudio

# Logaritmos y Propiedades: Cambio de Base y Ecuaciones

Guía Maestra de 25 Ejercicios Resueltos Paso a Paso y Formulario Práctico

🎁 Edición de Estudio Gratuita (Primeros 5 Resueltos + 20 de Práctica)

## ⭐ Formulario Rápido y Conceptos Fundamentales

**Definición Fundamental del Logaritmo:** El logaritmo en base b de x es el exponente al que se debe elevar b para obtener x.

$$\log_b(x) = y \iff b^y = x \qquad (b > 0,\ b \neq 1,\ x > 0)$$

**Leyes de Producto, Cociente y Potencia:** Propiedades algebraicas para expandir o condensar expresiones logarítmicas.

$$\log_b(MN) = \log_b M + \log_b N, \quad \log_b\left(\frac{M}{N}\right) = \log_b M - \log_b N, \quad \log_b(M^k) = k \log_b M$$

**Identidades y Cancelación Inversa:** Relaciones elementales entre las funciones exponencial y logarítmica.

$$\log_b(1) = 0, \quad \log_b(b) = 1, \quad b^{\log_b x} = x, \quad \log_b(b^y) = y$$

**Fórmula de Cambio de Base:** Permite calcular logaritmos de cualquier base utilizando logaritmo decimal o natural.

$$\log_b(x) = \frac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(b)} = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$$

**Escalas Científicas Logarítmicas:** Aplicaciones directas en química analítica y acústica.

$$\mathrm{pH} = -\log_{10}[\mathrm{H}^+], \qquad \beta_{\mathrm{dB}} = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

## Parte 1: Calentamiento (Uso Directo de Fórmulas)

*Enfocada en afianzar conceptos clave y despejes básicos.*

## Ejercicio 1 Evaluación directa de logaritmo en base 2

Calcula el valor exacto de $\log_2(32)$ aplicando la definición fundamental.

### 💡 Procedimiento Paso a Paso:

**Datos Clave:**

- Base: $b = 2$
- Argumento: $x = 32 = 2^5$

**Fórmula y Despeje:**

$$\log_b(x) = y \iff b^y = x$$

Despejando:

$$2^y = 32 = 2^5$$

**Sustitución y Operaciones:**

$$2^y = 2^5 \implies y = 5$$

**RESULTADO:** $5$

*Nota Física:* El exponente al que debemos elevar $2$ para obtener $32$ es $5$.

## Ejercicio 2 Logaritmo con argumento fraccionario

Determina el resultado de $\log_3\left(\frac{1}{81}\right)$.

### 💡 Procedimiento Paso a Paso:

**Datos Clave:**

- Base: $b = 3$
- Argumento: $x = \frac{1}{81} = \frac{1}{3^4} = 3^{-4}$

**Fórmula y Despeje:**

$$\log_b(b^k) = k$$

**Sustitución y Operaciones:**

$$\log_3(3^{-4}) = -4$$

**RESULTADO:** $-4$

*Nota Física:* Cuando el argumento está entre $0$ y $1$ con base $b > 1$, el logaritmo siempre es negativo.

## Ejercicio 3 Logaritmo decimal de una potencia de 10

Evalúa $\log(0.001)$ sin usar calculadora.

### 💡 Procedimiento Paso a Paso:

**Datos Clave:**

- Base implícita decimal: $b = 10$
- Argumento: $0.001 = 10^{-3}$

**Fórmula y Despeje:**

$$\log(10^k) = k$$

**Sustitución y Operaciones:**

$$\log(0.001) = \log_{10}(10^{-3}) = -3$$

**RESULTADO:** $-3$

*Nota Física:* Contar los desplazamientos del punto decimal hacia la derecha da directamente el exponente negativo.

## Ejercicio 4 Cálculo de incógnita en el argumento por definición

Resuelve la ecuación elemental $\log_5(x) = 3$.

### 💡 Procedimiento Paso a Paso:

**Datos Clave:**

- Base: $5$, Exponente: $3$

**Fórmula y Despeje:**

$$\log_b(x) = y \iff x = b^y$$

**Sustitución y Operaciones:**

$$x = 5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$$

**RESULTADO:** $x = 125$

*Nota Física:* Convertir a forma exponencial despeja la incógnita en un solo paso y cumple $125 > 0$.

**Ejercicio 5** **Logaritmo natural con radical en el argumento**

Calcula el valor exacto de $\ln(\sqrt[3]{e^2})$.

💡 **Procedimiento Paso a Paso:**

**Datos Clave:**

- Base del logaritmo natural: $e$
- Exponente fraccionario: $\sqrt[3]{e^2} = e^{2/3}$

**Fórmula y Despeje:**

$$\ln(e^k) = k$$

**Sustitución y Operaciones:**

$$\ln(e^{2/3}) = \frac{2}{3}$$

**RESULTADO:** $\frac{2}{3}$

*Nota Física:* La función $\ln$ y la exponencial $e^x$ se cancelan mutuamente al ser inversas.

## Parte 2: Análisis y Aplicación Práctica

*Problemas contextualizados que requieren más de un paso analítico.*

**Ejercicio 6** **Determinación de la base desconocida**

Encuentra el valor de la base $b$ si $\log_b(64) = 3$.

**Datos del Problema:**

- Argumento: $64$, Logaritmo: $3$
- Condición de base: $b > 0,\ b \neq 1$

🔒

**¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?**

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 **Desbloquear Guía Completa de Logaritmos y Propiedades: Cambio de Base y Ecuaciones**

## Ejercicio 7 Logaritmo con raíz en la base

Calcula el valor exacto de $\log_{\sqrt{2}}(16)$.

**Datos del Problema:**

- Base: $\sqrt{2} = 2^{1/2}$
- Argumento: $16 = 2^4$

**¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?**

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 **Desbloquear Guía Completa de Logaritmos y Propiedades: Cambio de Base y Ecuaciones**

## Ejercicio 8 Expansión algebraica usando leyes de los logaritmos

Expande completamente en suma y resta de logaritmos simples: $\log_b\left(\frac{x^3\sqrt{y}}{z^4}\right)$.

**Datos del Problema:**

- Producto en numerador: $x^3 \cdot y^{1/2}$
- Divisor en denominador: $z^4$

**¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?**

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 **Desbloquear Guía Completa de Logaritmos y Propiedades: Cambio de Base y Ecuaciones**

## Ejercicio 9 Condensación en un solo logaritmo

Expresa como un único logaritmo simplificado: $2\log(x) + \frac{1}{2}\log(y) - 3\log(z)$.

**Datos del Problema:**

- Coeficientes: $2, \frac{1}{2}, -3$

**¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?**

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 **Desbloquear Guía Completa de Logaritmos y Propiedades: Cambio de Base y Ecuaciones**

## Ejercicio 10 Evaluación numérica combinando propiedades

Calcula el valor exacto sin calculadora de: $\log_6(4) + \log_6(9)$.

**Datos del Problema:**

- Misma base: $b = 6$
- Argumentos: $4$ y $9$

**¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?**

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Logaritmos y Propiedades: Cambio de Base y Ecuaciones

## Ejercicio 11 Resta de logaritmos en base 5

Simplifica exactamente: $\log_5(250) - \log_5(2)$.

**Datos del Problema:**

- Base común: $5$

**¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?**

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Logaritmos y Propiedades: Cambio de Base y Ecuaciones

## Ejercicio 12 Cálculo mediante fórmula de cambio de base

Calcula $\log_3(20)$ con cuatro decimales utilizando logaritmo natural.

**Datos del Problema:**

- $\ln(20) \approx 2.995732, \ln(3) \approx 1.098612$

**¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?**

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Logaritmos y Propiedades: Cambio de Base y Ecuaciones

### Ejercicio 13 Identidad de cancelación con exponente logarítmico

Calcula el valor exacto de: $4^{\log_4(11)} + 2^{\log_2(5)} - 10^{\log(3)}$.

**Datos del Problema:**

- Propiedad: $b^{\log_b(x)} = x$

**¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?**

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Logaritmos y Propiedades: Cambio de Base y Ecuaciones

### Ejercicio 14 Cálculo del pH de una solución química

Una bebida tiene una concentración de iones hidrógeno $[\mathrm{H}^+] = 2.5 \times 10^{-4}\ \mathrm{mol/L}$. Calcula su pH sabiendo que $\log_{10}(2.5) \approx 0.3979$.

**Datos del Problema:**

- $[\mathrm{H}^+] = 2.5 \times 10^{-4}$

**¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?**

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Logaritmos y Propiedades: Cambio de Base y Ecuaciones

### Ejercicio 15 Nivel de intensidad sonora en decibeles

Si la intensidad acústica de un concierto es $I = 10^9 I_0$ (mil millones de veces el umbral auditivo $I_0$), ¿cuál es el nivel sonoro en decibeles ($\mathrm{dB}$)?

**Datos del Problema:**

- Cociente de intensidad: $\frac{I}{I_0} = 10^9$

**¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?**

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Logaritmos y Propiedades: Cambio de Base y Ecuaciones

## Parte 3: Nivel Examen e Ingeniería

*Ejercicios de alta exigencia, situaciones combinadas y casos reales.*

## Ejercicio 16 Ecuación logarítmica básica con argumento lineal

Resuelve y comprueba la ecuación: $\log_2(3x-5)=4$.

**Datos del Problema:**

- Restricción de dominio: $3x-5>0 \implies x>\frac{5}{3}$

**¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?**

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Logaritmos y Propiedades: Cambio de Base y Ecuaciones

## Ejercicio 17 Ecuación logarítmica con solución espuria descartada

Resuelve $\log_2(x)+\log_2(x-6)=4$ verificando el dominio original.

**Datos del Problema:**

- Restricción de dominio: $x>0$ y $x-6>0 \implies x>6$

**¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?**

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Logaritmos y Propiedades: Cambio de Base y Ecuaciones

## Ejercicio 18 Ecuación logarítmica por inyectividad en ambos miembros

Halla $x$ en: $\log_3(x+4)-\log_3(x-2)=\log_3(4)$.

**Datos del Problema:**

- Dominio: $x-2>0 \implies x>2$

**¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?**

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Logaritmos y Propiedades: Cambio de Base y Ecuaciones

### Ejercicio 19 Ecuación exponencial sin base común resuelta con ln

Resuelve $3^{2x-1} = 15$ en forma exacta y aproximada a 4 decimales.

**Datos del Problema:**

- Bases incompatibles: $3$ y $15$

**¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?**

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Logaritmos y Propiedades: Cambio de Base y Ecuaciones

### Ejercicio 20 Cambio de base encadenado (regla de la cadena logarítmica)

Simplifica exactamente el producto: $P = \log_2(3) \cdot \log_3(5) \cdot \log_5(16)$.

**Datos del Problema:**

- Cambio a logaritmo natural en cada factor

**¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?**

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Logaritmos y Propiedades: Cambio de Base y Ecuaciones

### Ejercicio 21 Tiempo de duplicación de un capital con interés compuesto continuo

Una inversión crece según $A(t) = A_0 e^{0.08t}$, donde $t$ se mide en años. ¿En cuántos años se duplica el capital inicial?

**Datos del Problema:**

- Condición: $A(t) = 2A_0$
- Tasa continua: $r = 0.08$

**¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?**

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Logaritmos y Propiedades: Cambio de Base y Ecuaciones

## Ejercicio 22 Desintegración radiactiva y vida media con logaritmos

Un isótopo decae según $m(t) = 100e^{-0.05t}$ gramos ($t$ en días). ¿Después de cuántos días quedarán $25$ g?

**Datos del Problema:**

- $m_0 = 100$ g, $m(t) = 25$ g

🔒 **¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?**

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 **Desbloquear Guía Completa de Logaritmos y Propiedades: Cambio de Base y Ecuaciones**

## Ejercicio 23 Ecuación logarítmica con bases distintas (b y b²)

Resuelve la ecuación: $\log_2(x) + \log_4(x) = 6$.

**Datos del Problema:**

- Dominio: $x > 0$
- Cambio de base: $\log_4(x) = \frac{\log_2(x)}{\log_2(4)} = \frac{1}{2}\log_2(x)$

🔒 **¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?**

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 **Desbloquear Guía Completa de Logaritmos y Propiedades: Cambio de Base y Ecuaciones**

## Ejercicio 24 Ecuación cuadrática en logaritmo (sustitución u)

Encuentra todas las soluciones reales de: $(\log x)^2 - 5\log x + 6 = 0$.

**Datos del Problema:**

- Cambio de variable: $u = \log_{10}(x)$
- Dominio: $x > 0$

🔒 **¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?**

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 **Desbloquear Guía Completa de Logaritmos y Propiedades: Cambio de Base y Ecuaciones**

**Ejercicio 25** **Expresión logarítmica en función de parámetros a y b**

Si $\log(2) = a$ y $\log(3) = b$, expresa $\log(72)$ y $\log(15)$ únicamente en términos de $a$ y $b$.

**Datos del Problema:**

- $72 = 2^3 \times 3^2$
- $15 = \frac{30}{2} = \frac{3 \times 10}{2}$




**¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?**

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 **Desbloquear Guía Completa de Logaritmos y Propiedades: Cambio de Base y Ecuaciones**