FISIMAT.com.mx
CÁLCULO VECTORIAL • MATEMÁTICAS UNIVERSITARIAS

Ing. Carlos Julián
Guía Exclusiva de Estudio

Teorema de Green: Integrales de Línea y Rotacional en el Plano

Guía Maestra de 25 Ejercicios Resueltos Paso a Paso y Formulario de Cálculo Vectorial

🎁 Edición de Estudio Gratuita (Primeros 5 Resueltos + 20 de Práctica)

⭐ Formulario Rápido y Conceptos Fundamentales

Enunciado Estándar del Teorema de Green: Transforma una integral de línea en una curva cerrada simple orientada positivamente en una integral doble sobre la región encerrada D.

$$\oint_C (P\,dx + Q\,dy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

Fórmulas de Área por Integrales de Línea: Permite hallar el área geométrica de cualquier región plana mediante la parametrización de su borde perimetral.

$$\text{Área}(D) = \oint_C x\,dy = -\oint_C y\,dx = \frac{1}{2}\oint_C (x\,dy - y\,dx)$$

Forma Vectorial de Circulación (Rotacional 2D): Relaciona la circulación macroscópica a lo largo de C con la densidad de remolinos infinitesimales en el interior.

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_D (\text{rot}\,\vec{F}\cdot\hat{k})\,dA = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

Forma Vectorial de Flujo Normal (Divergencia 2D): Calcula el flujo saliente neto a través de la frontera cerrada en términos de las fuentes y sumideros del campo.

$$\oint_C \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = \oint_C (P\,dy - Q\,dx) = \iint_D \text{div}\,\vec{F}\,dA = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dA$$

Condición de Campo Conservativo (Circulación Nula): Si el rotacional es idénticamente nulo, el trabajo a lo largo de cualquier trayectoria cerrada es cero.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad \text{en } D \text{ simplemente conexo} \implies \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$

Parte 1: Calentamiento (Uso Directo de Fórmulas)

Enfocada en afianzar conceptos clave y despejes básicos.

Ejercicio 1 **Verificación directa en un triángulo rectángulo**

Aplica el Teorema de Green para calcular $\oint_C (y^2dx + x^2dy)$, donde C es el triángulo con vértices $(0,0)$, $(2,0)$ y $(2,3)$ recorrido en sentido antihorario.

💡 **Procedimiento Paso a Paso:**

Datos Clave:

- P(x, y) = y^2 \implies \frac{\partial P}{\partial y} = 2y
- Q(x, y) = x^2 \implies \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x
- Límites de D: 0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le \frac{3}{2}x

Fórmula y Despeje:

$$\oint_C (P\,dx + Q\,dy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

Despejando:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2y$$

Sustitución y Operaciones:

$$\int_0^2 \int_0^{\frac{3}{2}x} (2x - 2y)\,dy\,dx = \int_0^2 \left[2xy - y^2\right]_0^{\frac{3}{2}x} dx = \int_0^2 \left(2x\left(\frac{3}{2}x\right) - \frac{9}{4}x^2\right) dx = \int_0^2 \left(3x^2 - \frac{9}{4}x^2\right) dx = \int_0^2 \frac{3}{4}x^2 dx = \left[\frac{x^3}{4}\right]_0^2 = \frac{8}{4} = 2$$

RESULTADO: $\oint_C (y^2dx + x^2dy) = 2$

Nota Física: El Teorema de Green reemplaza tres integrales de línea sobre los lados del triángulo por una única integral doble iterada.

Ejercicio 2 **Circulación sobre una circunferencia unitaria**

Calcula $\oint_C (xy\,dx + x^2\,dy)$ donde C es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ recorrida en sentido positivo (antihorario).

💡 **Procedimiento Paso a Paso:**

Datos Clave:

- P = xy \implies \frac{\partial P}{\partial y} = x
- Q = x^2 \implies \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x
- D: x^2 + y^2 \le 1 \text{ (disco unitario)}

Fórmula y Despeje:

$$\oint_C (P\,dx + Q\,dy) = \iint_D (2x - x)\,dA = \iint_D x\,dA$$

Despejando:

$$\text{Por simetría impar de } x \text{ en el disco centrado en el origen, } \iint_D x\,dA = 0$$

Sustitución y Operaciones:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r\cos\theta) r\,dr\,d\theta = \left(\int_0^1 r^2 dr\right)\left(\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta\right) = \left(\frac{1}{3}\right)(0) = 0$$

RESULTADO: $\oint_C (xy\,dx + x^2\,dy) = 0$

Nota Física: La componente de rotacional no nula es antisimétrica respecto al eje y, haciendo que la circulación total se cancele a cero.

Ejercicio 3 **Cálculo de área de una elipse con semiejes dados**

Utiliza la fórmula de área del Teorema de Green $\text{Área} = \frac{1}{2}\oint_C (x\,dy - y\,dx)$ para calcular el área de la elipse con semiejes $a = 4$ y $b = 3$.

💡 **Procedimiento Paso a Paso:**

Datos Clave:

- Parametrización: $x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi$
- dx = -a\sin t\,dt, \quad dy = b\cos t\,dt
- a = 4, \quad b = 3

Fórmula y Despeje:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (x\,dy - y\,dx)$$

Despejando:

$$x\,dy - y\,dx = (a\cos t)(b\cos t\,dt) - (b\sin t)(-a\sin t\,dt) = ab(\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt = ab\,dt$$

Sustitución y Operaciones:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\,dt = \frac{1}{2}ab[t]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}ab(2\pi) = \pi ab = \pi(4)(3) = 12\pi$$

RESULTADO: $\text{Área} = 12\pi \approx 37.699$

Nota Física: Green permite deducir y calcular áreas de curvas cerradas paramétricas sin despejar explícitamente y en función de x.

Ejercicio 4 **Integral de línea a lo largo de un cuadrado**

Evalúa $\oint_C (3y\,dx + 4x\,dy)$ donde C es la frontera del cuadrado $[0,1] \times [0,1]$ orientada en sentido antihorario.

💡 **Procedimiento Paso a Paso:**

Datos Clave:

- P = 3y \implies \frac{\partial P}{\partial y} = 3
- Q = 4x \implies \frac{\partial Q}{\partial x} = 4
- D: 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1

Fórmula y Despeje:

$$\oint_C (P\,dx + Q\,dy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Despejando:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 4 - 3 = 1$$

Sustitución y Operaciones:

$$\iint_D 1\,dA = \text{Área}(D) = 1 \times 1 = 1$$

RESULTADO: $\oint_C (3y\,dx + 4x\,dy) = 1$

Nota Física: Al ser el rotacional una constante unitaria, la integral de línea coincide exactamente con el área del cuadrado.

Ejercicio 5 **Identificación de campo conservativo con rotacional nulo**

Determina si la integral $\oint_C [(2xy^3 - y^2)dx + (3x^2y^2 - 2xy)dy]$ a lo largo de cualquier elipse cerrada es nula.

💡 **Procedimiento Paso a Paso:**

Datos Clave:

- P = 2x y^3 - y^2 \implies \frac{\partial P}{\partial y} = 6x y^2 - 2y
- Q = 3x^2 y^2 - 2xy \implies \frac{\partial Q}{\partial x} = 6x y^2 - 2y

Fórmula y Despeje:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

Despejando:

$$(6xy^2 - 2y) - (6xy^2 - 2y) = 0 \quad \text{en todo } \mathbb{R}^2$$

Sustitución y Operaciones:

$$\oint_C (P\,dx + Q\,dy) = \iint_D 0\,dA = 0$$

RESULTADO: $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (\text{El campo es estrictamente conservativo})$

Nota Física: El campo vectorial proviene del gradiente de la función potencial $f(x,y) = x^2y^3 - xy^2$.

Parte 2: Análisis y Aplicación Práctica

Problemas contextualizados que requieren más de un paso analítico.

Ejercicio 6 **Región acotada por una parábola y una recta**

Calcula $\oint_C (xy\,dx + x^2y^3\,dy)$ donde C es la frontera de la región comprendida entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = x$, recorrida en sentido antihorario.

Datos del Problema:

- P = xy \implies P_y = x
- Q = x^2 y^3 \implies Q_x = 2x y^3
- Puntos de corte: x^2 = x \implies x = 0, x = 1
- Región D: 0 \le x \le 1, \quad x^2 \le y \le x

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 **Desbloquear Guía Completa de Teorema de Green: Integrales de Línea y Rotacional en el Plano**

Ejercicio 7 **Cálculo de trabajo en un campo de fuerzas con función exponencial**

Calcula el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\vec{F}(x,y) = (e^x - y^3)\hat{i} + (\cos y + x^3)\hat{j}$ al desplazar una partícula a lo largo del círculo $x^2 + y^2 = 4$ en sentido antihorario.

Datos del Problema:

- P = e^x - y^3 \implies \frac{\partial P}{\partial y} = -3y^2
- Q = \cos y + x^3 \implies \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2
- D: x^2 + y^2 \le 4 \implies R = 2

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 **Desbloquear Guía Completa de Teorema de Green: Integrales de Línea y Rotacional en el Plano**

Ejercicio 8 **Área bajo un lazo de astroide**

Calcula el área encerrada por la astroide $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$ para $0 \le t \le 2\pi$ utilizando el Teorema de Green.

Datos del Problema:

- x = a\cos^3 t \implies dx = -3a\cos^2 t\sin t\,dt
- y = a\sin^3 t \implies dy = 3a\sin^2 t\cos t\,dt

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 **Desbloquear Guía Completa de Teorema de Green: Integrales de Línea y Rotacional en el Plano**

Ejercicio 9 Circulación en un semi-anillo con coordenadas polares

Evalúa $\oint_C (2xy^3dx + 4x^2y^2dy)$ sobre la frontera del semi-anillo superior $1 \le x^2 + y^2 \le 9$ con $y \ge 0$ orientada positivamente.

Datos del Problema:

- P = 2x y^3 \implies P_y = 6x y^2
- Q = 4x^2 y^2 \implies Q_x = 8x y^2
- Q_x - P_y = 2x y^2
- D: 1 \le r \le 3, \quad 0 \le \theta \le \pi

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Teorema de Green: Integrales de Línea y Rotacional en el Plano

Ejercicio 10 Teorema de Green con orientación negativa (sentido horario)

Calcula $\oint_C (\sin(x^2)dx + 3xdy)$ donde C es el círculo $(x-2)^2 + y^2 = 4$ recorrido en sentido de las manecillas del reloj.

Datos del Problema:

- P = \sin(x^2) \implies P_y = 0
- Q = 3x \implies Q_x = 3
- Q_x - P_y = 3
- Orientación horaria: \oint_{-C} = -\iint_D (Q_x - P_y)\,dA

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Teorema de Green: Integrales de Línea y Rotacional en el Plano

Ejercicio 11 Forma de flujo y Teorema de la Divergencia 2D

Para el campo $\vec{F}(x,y) = (x^3 + y)\hat{i} + (y^3 - x)\hat{j}$, calcula el flujo neto hacia el exterior $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds$ a través de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$.

Datos del Problema:

- P = x^3 + y \implies \frac{\partial P}{\partial x} = 3x^2
- Q = y^3 - x \implies \frac{\partial Q}{\partial y} = 3y^2
- \text{div}\,\vec{F} = P_x + Q_y = 3(x^2 + y^2)

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Teorema de Green: Integrales de Línea y Rotacional en el Plano

Ejercicio 12 Cálculo de área de un lazo de cicloide

Calcula el área comprendida entre un arco de cicloide $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ para $0 \leq t \leq 2\pi$ y el eje x ($y = 0$).

Datos del Problema:

- Frontera C = C1 (arco de cicloide) + C2 (segmento base y=0 de x=2pi a a 0)
- y = 0 \implies -\int y\,dx = 0

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Teorema de Green: Integrales de Línea y Rotacional en el Plano

Ejercicio 13 Independencia de la forma del camino entre puntos fijos

Demuestra que para el campo $\vec{F} = (2x + y)\hat{i} + (x + 3y^2)\hat{j}$, la integral $\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$ desde $(0, 0)$ hasta $(2, 1)$ es idéntica por cualquier curva suave.

Datos del Problema:

- P = 2x + y \implies P_y = 1
- Q = x + 3y^2 \implies Q_x = 1
- Q_x - P_y = 1 - 1 = 0

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Teorema de Green: Integrales de Línea y Rotacional en el Plano

Ejercicio 14 Circulación en un rombo centrado en el origen

Calcula $\oint_C (y\,dx - x\,dy)$ donde C es el perímetro del rombo $|x| + |y| = 2$ recorrido en sentido antihorario.

Datos del Problema:

- P = y \implies P_y = 1
- Q = -x \implies Q_x = -1
- Q_x - P_y = -1 - 1 = -2
- D: |x| + |y| \le 2

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Teorema de Green: Integrales de Línea y Rotacional en el Plano

Ejercicio 15 **Campo de rotación pura y Ley de Áreas de Kepler**

Para el campo de velocidades angulares rígidas $\vec{v}(x,y) = -\omega y\,\hat{i} + \omega x\,\hat{j}$, calcula la circulación $\oint_C \vec{v}\cdot d\vec{r}$ alrededor de una región cualquiera de área S.

Datos del Problema:

- P = -\omega y \implies P_y = -\omega
- Q = \omega x \implies Q_x = \omega
- Q_x - P_y = \omega - (-\omega) = 2\omega

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Teorema de Green: Integrales de Línea y Rotacional en el Plano

Parte 3: Nivel Examen e Ingeniería

Ejercicios de alta exigencia, situaciones combinadas y casos reales.

Ejercicio 16 **Singularidad en el origen y vórtice libre puntual**

Calcula $\oint_C \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$ a lo largo de cualquier curva cerrada simple C que encierre al origen en su interior.

Datos del Problema:

- P = \frac{-y}{x^2+y^2}, \quad Q = \frac{x}{x^2+y^2}
- P_y = \frac{-(x^2+y^2) - (-y)(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}
- Q_x = \frac{(x^2+y^2) - x(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \implies Q_x - P_y = 0 \quad (\forall (x,y) \neq (0,0))

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Teorema de Green: Integrales de Línea y Rotacional en el Plano

Ejercicio 17 **Curva que no encierra a la singularidad**

Calcula la misma integral del Ejercicio 16 pero sobre la circunferencia $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 1$ que no contiene al origen.

Datos del Problema:

- Singularidad (0,0) no pertenece a la región interior D
- Q_x - P_y = 0 \text{ en todo punto de } D

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Teorema de Green: Integrales de Línea y Rotacional en el Plano

Ejercicio 18 Identidad de Green I (Integración por partes multivariable)

Demuestra la Primera Identidad de Green en el plano: $\iint_D (u\nabla^2 v + \nabla u \cdot \nabla v)\, dA = \oint_C u \frac{\partial v}{\partial n}\, ds$.

Datos del Problema:

- Campo vectorial auxiliar: \vec{F} = u \nabla v = u \left(\frac{\partial v}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\hat{j} \right)
- Teorema de la divergencia: \iint_D \text{div}\,\vec{F}\,dA = \oint_C \vec{F} \cdot \vec{n}\,ds

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Teorema de Green: Integrales de Línea y Rotacional en el Plano

Ejercicio 19 Identidad de Green II y funciones armónicas

A partir de la Primera Identidad, deduce la Segunda Identidad de Green $\iint_D (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u)\, dA = \oint_C \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}\right) ds$ y concluye para dos funciones armónicas.

Datos del Problema:

- Funciones armónicas: \nabla^2 u = 0, \quad \nabla^2 v = 0

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Teorema de Green: Integrales de Línea y Rotacional en el Plano

Ejercicio 20 Área de una curva en coordenadas polares $r = f(\theta)$

Demuestra que la fórmula de área de Green en coordenadas polares conduce a $A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [r(\theta)]^2 d\theta$, y calcula el área encerrada por el cardioide $r = 1 + \cos\theta$.

Datos del Problema:

- x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta
- x\,dy - y\,dx = r^2 d\theta
- r(\theta) = 1 + \cos\theta

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Teorema de Green: Integrales de Línea y Rotacional en el Plano

Ejercicio 21 Circulación en un lazo de hoja de Descartes

Calcula el área encerrada en el primer cuadrante por el lazo del folio de Descartes $x^3 + y^3 = 3axy$ cuya parametrización es $x = \frac{3at}{1+t^3}, y = \frac{3at^2}{1+t^3}$ con $t \in [0, \infty)$.

Datos del Problema:

- x\,dy - y\,dx = x^2 d(y/x)
- y/x = t \implies d(y/x) = dt
- x^2 = \frac{9a^2 t^2}{(1+t^3)^2}

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Teorema de Green: Integrales de Línea y Rotacional en el Plano

Ejercicio 22 Teorema de Green para el operador biarmónico

Para una placa elástica plana sometida a flexión, la deflexión w satisface $\nabla^4 w = \nabla^2(\nabla^2 w) = q/D$. Demuestra que $\iint_D \nabla^4 w \, dA = \oint_C \frac{\partial(\nabla^2 w)}{\partial n} \, ds$.

Datos del Problema:

- Definimos la función auxiliar laplaciana: \psi = \nabla^2 w
- Teorema de la divergencia: \iint_D \nabla^2 \psi\,dA = \oint_C \nabla\psi \cdot \vec{n}\,ds

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Teorema de Green: Integrales de Línea y Rotacional en el Plano

Ejercicio 23 Cálculo de momentos de inercia planos mediante integrales de contorno

Aplica el Teorema de Green para expresar el momento de inercia polar $I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) dA$ como una integral de línea a lo largo de la frontera C.

Datos del Problema:

- Queremos que Q_x - P_y = x^2 + y^2
- Escogemos simétricamente: P = -\frac{1}{3}y^3, \quad Q = \frac{1}{3}x^3
- P_y = -y^2, \quad Q_x = x^2 \implies Q_x - P_y = x^2 + y^2

¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Teorema de Green: Integrales de Línea y Rotacional en el Plano

Ejercicio 24 Planímetro polar mecánico y Teorema de Green

Un planímetro de Amsler consta de dos brazos articulados. Demuestra mediante el Teorema de Green que el desplazamiento angular acumulado por su rueda integradora $\oint d\theta$ mide con precisión matemática el área de la figura recorrida.

Datos del Problema:

- Coordenadas del trazador: x = a\cos\alpha + b\cos\beta, \quad y = a\sin\alpha + b\sin\beta
- La rueda mide el desplazamiento tangencial neto: L = \oint (x\,dy - y\,dx) / (2b)

🔒 **¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?**

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Teorema de Green: Integrales de Línea y Rotacional en el Plano

Ejercicio 25 Teorema de Green sobre una superficie curva en el espacio (Stokes)

Para una superficie paramétrica $\vec{r}(u,v)$ acotada por una curva espacial $C = \partial S$, demuestra que el Teorema de Stokes $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot d\vec{S}$ se reduce al Teorema de Green cuando la superficie es enteramente plana sobre el plano xy.

Datos del Problema:

- Superficie S en el plano z = 0 \implies d\vec{S} = \hat{k}\,dx\,dy
- Campo: \vec{F} = P\hat{i} + Q\hat{j} + 0\hat{k}
- \text{rot}\,\vec{F} \cdot \hat{k} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}

🔒 **¿Quieres ver el procedimiento paso a paso y la comprobación de este ejercicio?**

Desbloquea la **Guía Completa en PDF** con los 25 ejercicios resueltos paso a paso, diagramas vectoriales y formulario extendido por solo **$49 MXN**.

👉 Desbloquear Guía Completa de Teorema de Green: Integrales de Línea y Rotacional en el Plano